Fonctions à valeurs vectorielles

Données : $(E, \|\cdot\|)$ est un evn
I est un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $\mathring{I} \neq \emptyset$
$t_0 \in I$, f : applique I dans E.

I Dérivabilité, opérations

Déf : f est dérivable en t_0 ssi

① $\exists \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \left(= f'(t_0)\right)$

$\Leftrightarrow$ ② $\exists u \in E \quad f(t_0+h) - f(t_0) \underset{v(0)}{=} h\,u + o(h)$ | $o(h)$ vecteur

$\Leftrightarrow$ ③ $\exists \Lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, E) \quad f(t_0+h) - f(t_0) = \Lambda(h) + o(h)$

① $\Rightarrow$ ② $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(t_0) + \underbrace{\varepsilon(t)}_{\to 0 \text{ en } t_0}$ donne $f(t_0+h) - f(t_0) = h f'(t_0) + o(h)$

② $\Rightarrow$ ① idem

② $\Rightarrow$ ③ On pose $\Lambda(h) = h \cdot u$ ③ $\Rightarrow$ ② : $\Lambda(h) = h\Lambda(1)$, on pose $u = \Lambda(1)$

Prop : Si f est dérivable en t_0, elle est continue en t_0

$\exists k > 0, \forall t \in]t_0 - \eta, t_0 + \eta[\cap I \quad \|f(t) - f(t_0)\| \leq \underbrace{(\|f'(t_0)\| + 1)}_{\simeq AF} |t - t_0|$

Opérations : Somme, produit scalaire & vectorielle, composition
$t \to t_0$: $\cancel{\dfrac{g(f(t)) - g(f(t_0))}{f(t) - f(t_0)} \cdot \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}}$: $x^2 \sin \frac{1}{x}$

Vocabulaire : (et notations)
$\Delta^1(I, E)$, $\mathcal{C}^1(I, E)$
$\Delta^p(I, E)$, $\mathcal{C}^p(I, E)$ $\quad \Delta^{p+1}(I) \subset \mathcal{C}^p(I)$
$\mathcal{C}^\infty(I, E)$, $C^\omega(I, E)$ analytiques

Prop: On se donne $f_i : I \to E_i$, evn, dérivable en t_0

et $\varphi\ E_1 \times \dots \times E_p \to F$, p linéaire et $\mathcal{C}^0$

On introduit $g \begin{pmatrix} I \to F \\ t \mapsto \varphi(f_1(t), \dots, f_p(t)) \end{pmatrix}$ alors g est dérivable

en t_0 et $g'(t_0) = \varphi(f_1'(t_0), f_2(t_0), \dots, f_p(t_0)) + \dots + \varphi(f_1(t_0), \dots, f_p'(t_0))$ (*)

$(A - B = A - A_1 + A_1 - A_2 + \dots + A_{p-1} - B)$

$A - B + B - C$

D/ $\dfrac{\varphi(f_1(t), \dots, f_p(t)) - \varphi(f_1(t_0), \dots, f_p(t_0))}{t - t_0} = \varphi\left(\dfrac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, f_2(t), \dots, f_p(t)\right)$

$+ \varphi\left(f_1(t_0), \dfrac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}, f_3(t), \dots, f_p(t)\right) + \dots$

$+ \varphi\left(f_1(t_0), \dots, \dfrac{f_p(t) - f_p(t_0)}{t - t_0}\right) \longrightarrow (*)$

Lorsque $t \to t_0$, par $\mathcal{C}^0$ de φ : $\exists \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \sum\limits_{i=1}^{p} \varphi(f_1(t_0), \dots, f_i'(t_0), \dots, f_p(t_0))$

Exemple: 1) $f, g\ I \to E$ dérivable, B bil $\mathcal{C}^0$ $E^2 \to F$ evn

$$(B(f,g))' = B(f', g) + B(f, g')$$

2) $f, g : I \xrightarrow{\Delta} E$ evn

$$\langle f(t), g(t) \rangle' = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle$$

Si $\|f(t)\| = \text{cste}$ $\quad \langle f(t), f'(t) \rangle = 0$

3) $f, g\ I \to \mathbb{R}^3$ euclidien $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$

$(f \wedge g')' = f \wedge g'' = 0$ si acc centrale

④ $f_1, \dots, f_m \; I \xrightarrow{\Delta^1} \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$)

$$\det(f_1, \dots, f_n)' = \sum_{i=1}^{m} \det(f_1, \dots, f'_i, \dots, f_m)$$

II Inégalité des accroissements finis

Th : Soient f, g | $g : [a,b] \to \mathbb{R}$
| $f : [a,b] \to E$ evn, continues sur $[a,b]$ dérivables

sur $]a,b[$ avec $\forall t \in]a,b[$, $\|f'(t)\| \leq g'(t)$, Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$

⚠ dim infinie D/ Soit $\varepsilon > 0$. On envisage $A_\varepsilon = \{t \in [a,b] \mid \|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t-a) + \varepsilon\}$

$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$ pas forcément Moi

Obs : $a \in A_\varepsilon$. Mieux : par $\mathcal{C}^0$, comme $\varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tq $[a, a+\eta] \subset A_\varepsilon$

A_ε est fermé : $c = \sup A_\varepsilon \in A_\varepsilon$: 1er cas $\underline{c = b}$ OK

2ème cas $c < b$ il vient $a + h \leq c < b$. f et g sont dérivables en c

On sait que $\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon$

$$\|f(c+h) - f(c)\| \leq \left(\|f'(c)\| + \frac{\varepsilon}{2}\right) h \leq \left(g'(c) + \frac{\varepsilon}{2}\right) h$$

et $\left(g'(c) + \frac{\varepsilon}{2}\right) h \leq g(c+h) - g(c) + \varepsilon h$ { G $h \to 0^+$; D tend vers $g'(c) + \varepsilon$ en divisant par h }

d'où $\|f(c+h) - f(c)\| \leq g(c+h) - g(c) + \varepsilon h$

(CCP) $0 < h < \delta$: $\|f(c+h) - f(a)\| \leq \|f(c+h) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\|$
$\leq g(c+h) - g(c) + \varepsilon h + g(c) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon$
$\leq g(c+h) - g(a) + \varepsilon(c+h-a) + \varepsilon$

$c + h \in A_\varepsilon$, $\underline{\text{ABS}}$

(CC) $\forall \varepsilon > 0$, $b \in A_\varepsilon$ c'à'd $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b-a) + \varepsilon$

$\varepsilon \to 0^+$ $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$

<u>Conséquences</u> ① $f \in \mathcal{D}^1(I,E)$: Si $\|f'\| \leq M$, f est M-lip sur E

② Si $f' \equiv 0$ f est cste

③ Inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b],E)$, $\mathcal{D}^{n+1}$ sur $]a,b[$ $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq M$

Alors $\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\| \leq A \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

D/ Soit $\varphi : x \mapsto f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)$ | φ est $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$
φ est $\mathcal{D}^1$ sur $]a,b[$

$\varphi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$ $\quad \left(\frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x) \right)'$

$\to$ disparition du terme $\frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)$

$\|\varphi'(x)\| \leq \frac{(b-x)^n}{n!} A$, $\quad g(x) = -\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A$

<u>En c</u> IAF $\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq g(b) - g(a)$

(But réel : l'EAF donne $\exists\, c \in]a,b[$, $R_n(a,b,f) = f^{(n+1)}(c) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$)

⚠ Pas d'EAF en gé $f'([a,b])$ est un intervalle

Conséquence Darboux

<u>Ex</u> Soit $f \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$ Alors $f'(I)$ est un intervalle.

D/ On note $T = \{(x,y) \in I^2 \mid x < y\}$, $\varphi : T \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

T est ~~convexe~~ donc connexe, φ est continue

revoir topo → $\varphi(T)$ est donc connexe dans $\mathbb{R}$, c'est un intervalle

i) EAF $\forall (x,y) \in T \quad \exists c \in]x,y[\quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$

et ainsi $\varphi(T) \subset f'(I)$, si $c \in I$ (Sauf exh. chaîte)

$c = \sup I \quad f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c)-f(c-h)}{h} \in \overline{\varphi(T)}$

$$\underbrace{\varphi(T) \subset f'(I) \subset \overline{\varphi(T)}}_{\text{intervalle}}$$

Ex : Donner un contre-ex $\mathbb{R} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{C}$ $\left| \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(x) = x^2 e^{i/x}, \text{ sur } [-1/4, 1/4] \setminus \{0\} \end{array} \right.$

$f'(x) = -i e^{i/x} + 2x e^{i/x}$; $\exists f'(0) = 0$

$\left| \begin{array}{l} x \neq 0 \\ |x| \leq 1/4 \end{array} \right. \qquad |f'(x)| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

__Prolong dérivable__ : $f :]a,b] \xrightarrow{\mathcal{C}^1} E$, avec $\exists \lim_{x \to a^+} f'(x) = \ell$

i) f ~~se~~ prolonge $\mathcal{C}^0$ en a si E est complet

i)/ f' est bornée sur $]a,b]$ mettons par M

Si $x_n \to a^+$ $\|f(x_n) - f(x_m)\| \leq M |x_n - x_m|$ $f(x_n)$ est de Cauchy, donc converge.

ii) Si f a un prolongement $\mathcal{C}^0$ en a, ce prolongement est $\mathcal{C}^1$
On re-note le prolong^t, on mq f est dérivable en a (OK)
$(f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell)$

Soit $g(x) = f(x) - f(a) - \ell(x-a)$, $\varepsilon > 0$

HYP $\exists \eta > 0 \; \forall x \in]a, a+\eta[\quad \|g'(x)\| = \|f'(x) - \ell\| \leq \varepsilon$

IAF $\|g(x) - g(a)\| \leq \varepsilon(x-a)$

$\|f(x) - f(a) - \ell(x-a)\| \leq \varepsilon(x-a)$ OK

théorème fondam.

déf de $\int$?

III TF

Th: Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], E)$, E complet. Si F est une primitive de f

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f \quad (\text{Leibniz})$$

unicité des DL

$\mathcal{C}^\infty \not\Rightarrow$ DSE

D/ Soit $G : x \mapsto \int_a^x f$ est $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in [a,b]$ $G'(x) = f(x)$

construction de l'int

On remarque $G - F$, $(G-F)' = 0$. Par l'IAF : $G - F$ est cste

et donc $\underbrace{G(b) - G(a)}_{\int_a^b f} = F(b) - F(a)$

Conséquence 1D Si $f \in \mathcal{C}^1([a,b], E)$ $f(b) - f(a) = \int_a^b f'$

? intég généralisée

pas forcément intég

il faut que f' soit intég

2D (I) si f est $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ pm, on pose $g(x) = f'(x)$

relativement à $x_0 = a < \dots < x_n = b$

$x \neq x_i$

$g(x_i) = \frac{f(x_i) + f}{2}$

Alors $f(b) - f(a) = \int_a^b g$

D/ g est CPM. $\int_a^b g = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g$, Notons f_i le prol $\mathcal{C}^1$ de $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$

à $[x_i, x_{i+1}]$

$f_i = f|_{[x_i, x_{i+1}]}$ car f est $\mathcal{C}^0$

De plus : $f_i' = g'$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ Donc

distribution

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i' = f_i(x_{i+1}) - f_i(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

On somme $\int_a^b g = f(b) - f(a)$ } Si f n'est pas $\mathcal{C}^0$ il apparaît des δx_i

Car. Theodory

Ex : Soit $f : [a,b] \xrightarrow{\Delta^1} \mathbb{R}^m$, mq $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \in \mathrm{Conv}(f'([a,b]))$

S/ a) $f\ \mathcal{C}^1$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f'\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \in \overline{\mathrm{Conv}}\, f'([a,b])$

b) Cas général $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \notin \overline{C}$

revoir

Stri — Séparation : il existe $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$, λ tq $\varphi\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) < \lambda$

$\forall x \in C \quad \lambda \leq \varphi(x)$

On regarde $g = \varphi \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$

On utilise le TAF $\exists c \in [a,b]$ $\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c)$ unicité Δ^1

Linéarité avec $g' = \varphi \circ f'$ | $\varphi\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) = \varphi(f'(c)) \in \varphi(C)$

tous $> \lambda$, Abs